Tentamen Discrete Structuren

woensdag 8 april 2009, 9:00 -12:00 uur

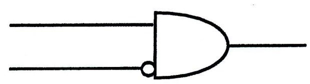
Elke opgave levert maximaal 9 punten op. Het cijfer is $(p/10) + 1$, afgerond op gehele en halve waarden, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is. Wie een 5 of hoger heeft gehaald voor de toets van 14 maart 2008, hoeft de eerste 5 opgaven niet te maken: het toetsresultaat telt voor de helft mee in het tentamenresultaat. Heb je bij de toets 5 of hoger gehaald en maak je ook de opgaven 1 t/m 5, dan telt het beste resultaat.

N.B.: Beargumenteer je antwoorden.

1. Toon aan dat $\sqrt{\frac{2}{3}}$ irrationaal is.
2. Bewijs met een geannoteerd lineair bewijs:
$$[(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)] \rightarrow (a \rightarrow \neg b)$$
3. Wanneer zijn twee grafen isomorf? Laat zien dat de isomorfie relatie op de verzameling grafen een equivalentierelatie is.
4. Toon aan dat $3^n + 2n - 1$ deelbaar is door 4 voor alle $n \in \mathbb{P}$.
5. Geef een expliciete definitie voor de rij die gegeven is door:
$$\begin{aligned} &s_0 = 0 \qquad s_1 = 5 \\ &s_n = s_{n-1} + 6 \cdot s_{n-2} \qquad \text{voor } n \geq 2 \end{aligned}$$

6. Stel G is een ongerichte graaf, zonder loops en parallelle ribben (edges), met n knopen (vertices) en $n \geq 3$, waarbij voor elke knoop, v, geldt: $deg(v) \geq \frac{1}{2}n$. Toon aan dat in G geldt dat elke knoop deel uitmaakt van een cykel met met drie knopen.
Hint: Ga uit van knopen u en v met een ribbe ertussen..

7. Geef voor (a), (b) en (c) een logische netwerk waarbij alleen de volgende poort gebruikt wordt.



   (a) Een logische netwerk met één ingang en één uitgang, bij elke invoer een 0 op de uitgang.
   (b) Een logische netwerk met één ingang en één uitgang, met de invoer geïnverteerd op de uitgang.
   (c) Een logische netwerk met twee ingangen, x en y en één uitgang met $x \vee y$.

8. Laat zien dat de compositie $\phi_1 \circ \phi_2$ van twee Boolese algebra isomorfismen, $\phi_1 : B_1 \longrightarrow B_2$ en $\phi_2 : B_2 \longrightarrow B_3$ ook een Boolese algebra isomorfisme is.

9. Stel R is een relatie op $\{1,2,3,4,5\}$ met de Boolese matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Geef de Boolese matrix voor: $sr(R), rs(R), st(R)$ en $ts(R)$.

10. Toon aan dat $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ gelijkmachtig is aan $\mathsf{FUN}(\mathbb{P}, \{0,1,2,3\})$.